

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Горно-Алтайский государственный университет»
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

Квазиконформные отображения и их обобщения
рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 01.03.01_2023_633.plx
01.03.01 Математика
Прикладная математика и программирование

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **2 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 72
в том числе: Виды контроля в семестрах:
зачеты 7
аудиторные занятия 36
самостоятельная работа 26,1
часов на контроль 8,85

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	7 (4.1)		Итого	
	15 4/6		УП	РП
Неделя	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	18	18	18	18
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,15	0,15	0,15	0,15
Итого ауд.	36	36	36	36
Контактная работа	37,05	37,05	37,05	37,05
Сам. работа	26,1	26,1	26,1	26,1
Часы на контроль	8,85	8,85	8,85	8,85
Итого	72	72	72	72

Программу составил(и):

ст. преподаватель, Ваулин Д. А.



Рабочая программа дисциплины

Квазиконформные отображения и их обобщения

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 8)

составлена на основании учебного плана:

01.03.01 Математика

утвержденного учёным советом вуза от 26.12.2022 протокол № 12.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры

кафедра математики, физики и информатики

Протокол от 09.03.2023 протокол № 8

Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна



Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2024 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2025 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2026 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2027 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	<i>Цели:</i> научное обоснование понятий, изученных ранее в университетском курсе, применение их в процессе решения различных задач; изучение истории развития теории квазиконформных отображений.
1.2	<i>Задачи:</i> - развитие общей математической культуры; - теоретическое обоснование основных понятий данного курса; - совершенствование навыков математического и логического мышления. - понимание постановок исследовательских задач в этих областях и осуществление эффективного поиска информации, необходимого для самостоятельной научно-исследовательской работы, - овладение современным аппаратом квазиконформного анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.ДВ.07
2.1	Требования к предварительной подготовке обучающегося:
2.1.1	Комплексный анализ
2.1.2	Математический анализ
2.2	Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:
2.2.1	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы
2.2.2	Геометрия многообразий

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-1: Способен организовать учебную деятельность в конкретной предметной области (математика, информатика)	
ИД-4.ПК-1: Владеет методами решения задач элементарной математики соответствующей ступени образования, задач олимпиад, проводит различия между точным и (или) приближенным математическим доказательством	
Владеть методами доказательства теорем, составлять план доказательства и доказывать утверждение с использованием этого плана	
ПК-3: способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знает постановки классических задач математики	
ИД-1.ПК-3: Владеет способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	
Знать основные определения и формулировки теорем, относящиеся к области квазиконформных отображений.	
ИД-2.ПК-3: Умеет строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	
Уметь доказывать утверждения и теоремы в области квазиконформных отображений.	
ИД-3.ПК-3: Умеет публично представлять собственные и известные научные результаты	
Владеть способностью составить презентацию, представить результаты с использованием доски и презентации.	

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)							
Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте факт.	Примечание
	Раздел 1. Отклонения линейного преобразования и их вычисление						
1.1	1. Главные растяжения и отклонения линейного преобразования Свойства отклонений 2. Оценки для отклонений Полумультимпликативность отклонений	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	

1.2	1. Вычисления отклонений в плоскости 2. Вычисления отклонений в пространстве /Пр/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
1.3	1. Главные растяжения и отклонения линейного преобразования Свойства отклонений 2. Оценки для отклонений Полумультпликативность отклонений /Ср/	7	5	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 2. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов							
2.1	1. Определение коэффициентов квазиконформности 2. Примеры квазиконформных отображений на плоскости /Лек/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	
2.2	1. Свойства коэффициента квазиконформности Вычисление коэффициентов квазиконформности отображений на плоскости 2. Вычисление коэффициентов квазиконформности отображений в пространстве /Пр/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
2.3	1. Определение коэффициентов квазиконформности 2. Примеры квазиконформных отображений на плоскости /Ср/	7	5	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 3. Аналитическое и метрическое определения квазиконформности							
3.1	1. Стереографическая проекция. Мёбиусово преобразование 2. Задача Альфорса-Берлинга Расширение класса квазиконформных отображений /Лек/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	
3.2	Мёбиусово преобразование /Пр/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	
3.3	1. Стереографическая проекция. Мёбиусово преобразование 2. Задача Альфорса-Берлинга Расширение класса квазиконформных отображений /Ср/	7	6,1	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 4. Геометрическое определение квазиконформности							
4.1	1. Емкости и модули конденсаторов Квазиинвариантность емкости конденсатора 2. Вычисление емкостей конденсаторов Свойства емкостей /Лек/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	

4.2	Вычисление емкостей конденсаторов /Пр/	7	2	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	
4.3	1. Емкости и модули конденсаторов Квазиинвариантность емкости конденсатора 2. Вычисление емкостей конденсаторов Свойства емкостей /Ср/	7	5	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 5. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов							
5.1	1. Симметризация конденсаторов (упрощенная схема) Лемма Вайсяля Функция Тейхмюллера Принцип симметрии /Лек/	7	2	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
5.2	1. Лемма Вайсяля 2. Принцип симметрии /Пр/	7	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	2	
5.3	1. Симметризация конденсаторов (упрощенная схема) Лемма Вайсяля Функция Тейхмюллера Принцип симметрии /Ср/	7	5	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 6. Консультации							
6.1	Консультация по дисциплине /Конс/	7	0,9	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
Раздел 7. Промежуточная аттестация (зачёт)							
7.1	Подготовка к зачёту /Зачёт/	7	8,85	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	
7.2	Контактная работа /КСРАТТ/	7	0,15	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3 ИД-3.ПК-3 ИД-4.ПК-1	Л1.1Л2.1 Л2.2	0	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу дисциплины Квазиконформные отображения и их обобщения.
2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме вопросов к экзамену, тестов, коллоквиумов, индивидуальных заданий и контрольных работ.

5.2. Оценочные средства для текущего контроля

Оценочные средства для текущего контроля приведены в Приложении №1.

5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Темы письменных работ по данному предмету не предусмотрены.

5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Перечень вопросов к зачету

1. Главные растяжения отклонения линейного преобразования.
Алгоритм вычисления главных растяжений. Отклонения линейного преобразования. Элементарные свойства отклонений.
2. Отклонения линейного преобразования. Вычисление отклонений линейного преобразования плоскости.
3. Отклонения линейного преобразования в R^n . Оценки для отклонений.

4. Отклонения линейного преобразования в R^n . Оценки для отклонений. Полумультпликативность отклонений.
5. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов в R^n . Понятие квазиконформного отображения. Свойства коэффициентов квазиконформности.
6. Доказать, что на плоскости понятие 1-квазиконформного отображения и конформного преобразования совпадают.
7. Инверсия относительно сферы в R^n . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования инверсии.
8. Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования закручивания двугранного клина в R^3 вокруг его ребра.
9. Радиальное отображение единичного шара в R^3 . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования растяжения.
10. Стереографическая проекция пространства R^n . Определение мебиусова пространства R^n , понятие обобщенной сферы и инверсии относительно обобщенной сферы. Геометрические свойства инверсии.
11. Мёбиусово преобразование пространства R^n , свойства. Примеры.
12. Мёбиусово преобразование пространства R^n
- Конформные и антиконформные преобразования областей пространства R^n (случай $n=2$ и случай $n>2$). Теорема Лиувилля.
13. Задача Альфорса-Берлинга и ее решение. Понятие квазисимметрической функции.
14. Метрическое определение квазиконформного отображения, его геометрический смысл. Показать, что квазиконформный диффеоморфизм является квазиконформным в смысле метрического определения квазиконформного отображения.
15. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства.
16. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства. Абсолютно непрерывное отображение на n -мерном сегменте в R^n . Класс отображений ACL в области D пространства R^n . Свойства класса ACL. Отображения класса ACL, ACL_n , loc .
17. Аналитическое определение квазиконформности. Теорема сходимости. Теорема компактности.
18. Конденсатор кольцевой в R^n . Емкость и модуль конденсатора. Емкость шарового слоя
19. Квазиинвариантность емкости кольцевого конденсатора
20. Геометрическое определение квазиконформности. Вычисление емкости цилиндра, основания которого служат пластинами конденсатора.
21. Вычисление емкости цилиндрического слоя, боковые поверхности которого служат пластинами конденсатора. Емкость провода.
22. Симметризация конденсатора, основная теорема симметризации Геринга
23. Лемма Вайсяля. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов
24. Кольцо Тейхмюллера, функция Тейхмюллера, ее свойства. Нижняя оценка для емкости кольцевого конденсатора через функцию Тейхмюллера.
25. Абсолютное двойное отношение четверки точек в R^n . Мебиусова инвариантность абсолютного двойного отношения. Критерий мебиусовости гомеоморфизма R^n в терминах абсолютного двойного отношения.

Критерии оценки:

"Зачтено":

- студент знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;
- решены все индивидуальные задания;
- контрольные работы сданы на оценку не ниже "Удовлетворительно";

"Не зачтено":

- студент не знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент не знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;
- решены все индивидуальные задания;
- контрольные работы сданы на оценку ниже "Удовлетворительно";

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
--	---------------------	----------	-------------------	-----------

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Асеев В.В., Туртуева Т.А.	Квазиконформные отображения и емкости конденсаторов: учебное пособие	Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2014	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=288:kvazikonformnye-otobrazheniya-i-emkosti-kondensatorov&catid=5:mathematics&Itemid=163

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Боярчук А.К.	Справочное пособие по высшей математике. Т.4. Функции комплексного переменного: теория и практика: в 4-х	Москва: Едиториал УРСС, 2004	
Л2.2	Шабат Б.В.	Введение в комплексный анализ. Т.1. Функции одного переменного: в 2 т.: учебник для университетов	Москва: Наука, 1985	

6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Moodle
6.3.1.2	WinDjView
6.3.1.3	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ
6.3.1.4	MS Office
6.3.1.5	MS WINDOWS
6.3.1.6	NVDA
6.3.1.7	LibreOffice
6.3.1.8	MikTex

6.3.2 Перечень информационных справочных систем

6.3.2.1	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»
6.3.2.2	Электронно-библиотечная система IPRbooks
6.3.2.3	Межвузовская электронная библиотека

7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

	проблемная лекция	
	конференция	

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Номер аудитории	Назначение	Основное оснащение
206 Б1	Кабинет методики преподавания математики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, интерактивная доска, экран, проектор, компьютер, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
102 Б1	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, мультимедиапроектор, экран, компьютер. Рабочее место преподавателя, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), кафедра

200 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет
--------	--	---

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Методические указания по освоению дисциплин (модулей)

Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.

Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций. Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.

Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.

Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.

Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.

По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).

Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.

Лабораторные работы являются основными видами учебных занятий, направленными на экспериментальное (практическое) подтверждение теоретических положений и формирование общепрофессиональных и профессиональных компетенций. Они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

В процессе лабораторной работы как вида учебного занятия студенты выполняют одно или несколько заданий под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

При выполнении обучающимися лабораторных работ значимым компонентом становятся практические задания с использованием компьютерной техники, лабораторно - приборного оборудования и др. Выполнение студентами лабораторных работ проводится с целью: формирования умений, практического опыта (в соответствии с требованиями к

результатам освоения дисциплины, и на основании перечня формируемых компетенций, установленными рабочей программой дисциплины), обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний, совершенствования умений применять полученные знания на практике.

Состав заданий для лабораторной работы должен быть спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

При планировании лабораторных работ следует учитывать, что в ходе выполнения заданий у студентов формируются умения и практический опыт работы с различными приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, программами и др., которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).

Выполнению лабораторных работ предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания.

Формы организации студентов при проведении лабораторных работ: фронтальная, групповая и индивидуальная. При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется группами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Текущий контроль учебных достижений по результатам выполнения лабораторных работ проводится в соответствии с системой оценивания (рейтинговой, накопительной и др.), а также формами и методами (как традиционными, так и инновационными, включая компьютерные технологии), указанными в рабочей программе дисциплины (модуля). Текущий контроль проводится в пределах учебного времени, отведенного рабочим учебным планом на освоение дисциплины, результаты заносятся в журнал учебных занятий.

Объем времени, отводимый на выполнение лабораторных работ, планируется в соответствии с учебным планом ОПОП.

Перечень лабораторных работ в РПД, а также количество часов на их проведение должны обеспечивать реализацию требований к знаниям, умениям и практическому опыту студента по дисциплине (модулю) соответствующей ОПОП.

Самостоятельная работа обучающихся – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).

Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля); подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся (текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).

Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:

- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

Курсовая работа является самостоятельным творческим письменным научным видом деятельности студента по разработке конкретной темы. Она отражает приобретенные студентом теоретические знания и практические навыки. Курсовая работа выполняется студентом самостоятельно под руководством преподавателя.

Курсовая работа, наряду с экзаменами и зачетами, является одной из форм контроля (аттестации), позволяющей определить степень подготовленности будущего специалиста. Курсовые работы защищаются студентами по окончании изучения указанных дисциплин, определенных учебным планом.

Оформление работы должно соответствовать требованиям. Объем курсовой работы: 25–30 страниц. Список литературы и Приложения в объем работы не входят. Курсовая работа должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть, заключение, список литературы, приложение (при необходимости). Курсовая работа подлежит рецензированию руководителем курсовой работы. Рецензия является официальным документом и прикладывается к курсовой работе.

Тематика курсовых работ разрабатывается в соответствии с учебным планом. Руководитель курсовой работы лишь

помогает студенту определить основные направления работы, очертить её контуры, указывает те источники, на которые следует обратить главное внимание, разъясняет, где отыскать необходимые книги.

Составленный список источников научной информации, подлежащий изучению, следует показать руководителю курсовой работы.

Курсовая работа состоит из глав и параграфов. Вне зависимости от решаемых задач и выбранных подходов структура работы должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть; заключение; список литературы; приложение(я).

Во введении необходимо отразить: актуальность; объект; предмет; цель; задачи; методы исследования; структура работы.

Основную часть работы рекомендуется разделить на 2 главы, каждая из которых должна включать от двух до четырех параграфов.

Содержание глав и их структура зависит от темы и анализируемого материала.

Первая глава должна иметь обзорно–аналитический характер и, как правило, является теоретической.

Вторая глава по большей части раскрывает насколько это возможно предмет исследования. В ней приводятся практические данные по проблематике темы исследования.

Выводы оформляются в виде некоторого количества пронумерованных абзацев, что придает необходимую стройность изложению изученного материала. В них подводятся итог проведённой работы, непосредственно выводы, вытекающие из всей работы и соответствующие выявленным проблемам, поставленным во введении задачам работы; указывается, с какими трудностями пришлось столкнуться в ходе исследования.

Правила написания и оформления курсовой работы регламентируются Положением о курсовой работе (проекте), утвержденным решением Ученого совета ФГБОУ ВО ГАГУ от 27 апреля 2017 г.

Оценочное средство

Индивидуальное задание №1

Отклонения линейного преобразования и их вычисление

Пример 1.3.1. Рассмотрим случай плоскости ($n = 2$). Пусть задана невырожденная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Найти отклонение.

Ответ: формула для вычисления отклонения H :

$$H + \frac{1}{H} = \frac{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2}{|\det A|},$$

где $H = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1$.

Из двух корней этого квадратного уравнения следует взять тот корень, который ≥ 1 .

Пример 1.3.2. Найти отклонение H линейного преобразования

$$A : \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \\ A : \{x_1, x_2\} \rightarrow \{x_1 + x_2, x_2\}.$$

Ответ: $H = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.618$.

Пример 1.3.3. Линейное преобразование $A : R^3 \rightarrow R^3$ задано матрицей A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Найти для A отклонения H_L , H_O , H_I .

Ответ:

$H_L = \frac{4.3932}{0.5422} \approx 8.1$ – линейное отклонение,

$H_O = \frac{(4.3932)^3}{5} \approx 16.96$ – внешнее отклонение,

$H_I = \frac{5}{(0.5422)^3} \approx 31.36$ – внутреннее отклонение.

Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов

Доказать утверждения:

Теорема 2.1.9. (полуmultipликативность коэффициента квазиконформности)

Пусть $f : D \rightarrow D^*$ и $g : D^* \rightarrow G$ – квазиконформные отображения областей в R^n . Тогда их композиция $g \circ f$ есть квазиконформное отображение, и при этом

$$\begin{cases} K_L[g \circ f] \leq K_L[g] \cdot K_L[f] \\ K_O[g \circ f] \leq K_O[g] \cdot K_O[f] \\ K_I[g \circ f] \leq K_I[g] \cdot K_I[f] \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Теорема 2.1.11. Композиция квазиконформного отображения с 1-квази-конформным отображением имеет те же самые коэффициенты квазиконформности, что отображение f .

Упражнение. Проверить выполнение равенств $K_O[f \circ g] = K_O[f]$ и $K_I[f \circ g] = K_I[f]$ для композиции 1-квазиконформного отображения $g : D \rightarrow D^*$ и квазиконформного отображения $f : D^* \rightarrow G$.

Пример 2.2.1. Пусть на прямой $-\infty < x_1 < +\infty$ задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x_1)$, производная которой в любой точке x_1 имеет оценку: $|\varphi'(x_1)| \leq M < +\infty$.

Рассмотрим отображение $f : R^2 \rightarrow R^2$, заданное формулой $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \varphi(x_1))$.

Найти оценку для коэффициента квазиконформности отображения f .

Ответ:

$$K[f] \leq 1 + \frac{M^2}{2} + \sqrt{M^2 + \frac{M^4}{4}}.$$

Пример 2.2.2. Пусть D – область в комплексной плоскости, $z = x_1 + ix_2$ и $f : D \rightarrow D^*$ есть конформное отображение области D на область D^* . Показать, что $K[f] = \sup_{z \in R^2} H(T_f(z)) = 1$.

Убедиться, что верно и обратное утверждение.

Пример 2.2.6. В пространстве R^3 введем цилиндрические координаты $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $z \in R^1$. Для точки $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, не лежащей на оси Ox_3 , т.е. при $r^2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$, выполняются равенства (связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки)

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \varphi, \\ x_3 = z. \end{cases}$$

Зададим угол $0 < \alpha < 2\pi$. Область $D_\alpha = \{(r; \varphi; z) : 0 < \varphi < \alpha\}$ называется *двугранным клином* раствора α .

Рассмотрим еще один двугранный клин D_β раствора $\beta < 2\pi$ и отображение: $f : D_\alpha \rightarrow D_\beta$, $f : (r; \varphi; z) \mapsto (r; \frac{\beta}{\alpha}; z)$. Это отображение называется "закручиванием" (folding) пространства R^3 вокруг оси Ox_3 .

Найти его коэффициенты квазиконформности.

Ответ:

$$K_L[f] = \alpha/\beta; \quad K_O[f] = \alpha/\beta; \quad K_I[f] = (\alpha/\beta)^2.$$

Пример 2.2.7. В пространстве R^3 рассмотрим открытый шар $B = \{x : |x| < 1\}$ и для заданного $p > 0$ построим отображение $f : B \rightarrow B$, действующее по формуле $f(x) = |x|^{p-1} \cdot x$ (радиальное отображение).

Найти его коэффициенты квазиконформности.

Ответ:

$$K_L[f] = \frac{\pi}{2}; \quad K_O[f] = \frac{\pi^2}{4}; \quad K_I[f] = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.2.8. В R^3 вводим сферические координаты (ρ, φ, θ) и цилиндрические координаты (r, φ, z) . В верхнем полупространстве $D = \{x \in R^3 : \theta < \pi/2\}$ задаем отображение $f : (\rho, \varphi, \theta) \mapsto (r, \varphi, z)$, где $r = \rho$, $z = \ln \rho$.

Найти его коэффициенты квазиконформности.

Ответ:

$$K_L[f] = \frac{\pi}{2}; \quad K_O[f] = \frac{\pi^2}{4}; \quad K_I[f] = \frac{\pi}{2}.$$

Аналитическое и метрическое определения квазиконформности

Доказать следующие утверждения:

Утверждение 3.1.1. Для любого $b \in R^n$ преобразование переноса $\tau_b : x \mapsto x + b$, $\infty \mapsto \infty$ является мёбиусовым преобразованием.

Утверждение 3.1.2. Пусть $k > 0$. Гомотетия пространства \bar{R}^n , $h(x) = kx$, $h(\infty) = \infty$, является мёбиусовым преобразованием.

Утверждение 3.1.3. Поворот пространства R^n на угол α вокруг оси L (где L есть некоторое $(n-2)$ -мерное подпространство в R^n) является мёбиусовым преобразованием.

Геометрическое определение квазиконформности

Доказать следующие утверждения:

Теорема 4.3.1 (Емкость шарового слоя). Пусть $D = \{x \in R^n : R_0 < |x| < R_1\}$, $E_0 = \{x : |x| = R_0\}$, $E_1 = \{x : |x| = R_1\}$.

Тогда

$$\text{Cap}(E_0, E_1; D) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\ln \frac{R_1}{R_0}\right)^{n-1}}, \quad (4.3.2)$$

$$\text{Mod}(E_0, E_1; D) = \ln \frac{R_1}{R_0}, \quad (4.3.3)$$

где ω_{n-1} есть $(n-1)$ -мерная мера Лебега единичной гиперсферы в R^n .

Следствие 4.3.4. Если

$D = \{x : 0 < |x| < R\}$, $E_0 = \{0\}$, $E_1 = \{x : |x| = R\}$, то

$$\text{Cap}(E_0, E_1; D) = 0, \quad \text{Mod}(E_0, E_1; D) = \infty.$$

Теорема 4.3.5. Пусть $G = D_0 \times I$ - цилиндр в пространстве R^3 , основанием которого является область D_0 в плоскости Ox_1x_2 , и $I = \{0 \leq x_3 \leq h\}$. Пусть $E_0 = D_0 \times \{0\}$ - нижнее основание цилиндра, $E_1 = D_0 \times \{h\}$ - верхнее основание цилиндра. Тогда

$$\text{Cap}(D_0, D_1; G) = \frac{\text{mes}_2(D_0)}{h^2}. \quad (4.3.6)$$

Теорема 4.3.6. Пусть (r, φ, z) - цилиндрические координаты в R^3 . В цилиндрическом слое $D = \{(r, \varphi, z) : R_0 < r < R_1, 0 < z < H\}$ положим $E_0 = \{(r, \varphi, z) : r = R_0, 0 \leq z \leq H\}$ и $E_1 = \{(r, \varphi, z) : r = R_1, 0 \leq z \leq H\}$. Тогда

$$\text{Cap}(E_0, E_1; D) = \frac{\pi H}{2(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_0})^2}. \quad (4.3.7)$$

Следствие 4.3.8. (Емкость провода) При $R_0 = 0$

$$\text{Cap}(E_0, E_1; D) = \frac{\pi H}{2R_1} > 0.$$

Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов

Доказать следующие утверждения:

Лемма 5.2.6. Пусть E_0 и E_1 - два непересекающихся отрезка на прямой l . Если оба отрезка имеют ненулевую длину, то

$$\text{Cap}(E_0, E_1; R^n) > 0.$$

Теорема 5.2.7. Пусть E_0 и E_1 - непересекающиеся континуумы в R^n . Равенство $\text{Cap}(E_0, E_1; R^n) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда хотя бы один из континуумов E_0, E_1 вырожденный, т.е. является одноточечным множеством.

Доказать следующие утверждения:

Теорема 5.4.2. Пусть конденсатор $(E_0, E_1; D)$ симметричен относительно обобщенной гиперсферы Σ в \bar{R}^n , то есть $E_1 = j_\Sigma(E_0)$; $P = \Sigma \cap D$; $D = D_0 \cup P \cup D_1$, где $D_1 = j_\Sigma(D_0)$. Тогда

$$\text{Cap}(E_0, P; D) = \text{Cap}(E_1, P; D_1) = 2^{n-1} \text{Cap}(E_0, E_1; D).$$

Замечание. При выполнении условий теоремы 5.4.2 справедливы равенства

$$\text{Mod}(E_0, P; D_0) = \text{Mod}(E_1, P; D_1) = \frac{1}{2} \text{Mod}(E_0, E_1; D),$$

т.е. модуль половины симметричного конденсатора равен половине его модуля.

Критерии оценки:

Критерии	Оценка
- все задания индивидуальной работы решены верно и полностью; - студент может провести защиту каждого задания у доски, не используя решение; - студент может объяснить все методы и приемы, используемые в решении, знает теоретические предпосылки всех методов и приемов;	"Отлично"
- все задания индивидуальной работы решены верно или в некоторых заданиях работы допущены негрубые вычислительные ошибки при правильно выбранном методе; - студент может провести защиту каждого задания с использованием решения у доски или за партой; - студент знает методы и приемы, используемые в решении, демонстрирует основы теоретических обоснований методов и приемов.	"Хорошо"
- решено не менее 65% всех заданий индивидуальной работы; - студент знает и понимает методы и приемы решения заданий; - студент знает формулировки основных теорем, на которых основываются методы и приемы решения заданий;	"Удовлетворительно"
- решено менее 65% заданий работы; - студент не обнаруживает знание и понимание используемых им при решении заданий методов и приемов; - студент не знает (не понимает) теоретические основы методов и приемов.	Неудовлетворительно.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Главные растяжения отклонения линейного преобразования. Алгоритм вычисления главных растяжений. Отклонения линейного преобразования. Элементарные свойства отклонений.
2. Отклонения линейного преобразования. Вычисление отклонений линейного преобразования плоскости.
3. Отклонения линейного преобразования в R^n . Оценки для отклонений.
4. Отклонения линейного преобразования в R^n . Оценки для отклонений. Полумультпликативность отклонений.
5. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов в R^n . Понятие квазиконформного отображения. Свойства коэффициентов квазиконформности.
6. Доказать, что на плоскости понятие 1-квазиконформного отображения и конформного преобразования совпадают.
7. Инверсия относительно сферы в R^n . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования инверсии.
8. Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования закручивания двугранного клина в R^3 вокруг его ребра.
9. Радиальное отображение единичного шара в R^3 . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования растяжения.
10. Стереографическая проекция пространства R^n . Определение мебиусова пространства \bar{R}^n . понятие обобщенной сферы и инверсии относительно обобщенной сферы. Геометрические свойства инверсии.
11. Мёбиусово преобразование пространства \bar{R}^n , свойства. Примеры.
12. Мёбиусово преобразование пространства \bar{R}^n . Конформные и антиконформные преобразования областей пространства \bar{R}^n (случай $n = 2$ и случай $n > 2$). Теорема Лиувилля.
13. Задача Альфорса-Берлинга и ее решение. Понятие квазисимметрической функции.
14. Метрическое определение квазиконформного отображения, его геометрический смысл. Показать, что квазиконформный диффеоморфизм является квазиконформным в смысле метрического определения квазиконформного отображения.
15. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства.
16. Абсолютно непрерывное отображение на n -мерном сегменте в R^n . Класс отображений ACL в области D пространства R^n . Свойства класса ACL . Отображения класса $ACL_n, ACL_{n,loc}$.
17. Аналитическое определение квазиконформности. Теорема сходимости. Теорема компактности.
18. Конденсатор кольцевой в R^n . Емкость и модуль конденсатора. Емкость шарового слоя (без доказательства).
19. Квазиинвариантность емкости кольцевого конденсатора (с доказательством).
20. Геометрическое определение квазиконформности. Вычисление емкости цилиндра, основания которого служат пластинами конденсатора.
21. Вычисление емкости цилиндрического слоя, боковые поверхности которого служат пластинами конденсатора. Емкость провода.
22. Симметризация конденсатора, основная теорема симметризации Геринга (без доказательства).
23. Лемма Вайсяля. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов (с доказательством).
24. Кольцо Тейхмюллера, функция Тейхмюллера, ее свойства (без доказательства). Нижняя оценка для емкости кольцевого конденсатора через функцию Тейхмюллера.
25. Абсолютное двойное отношение четверки точек в \bar{R}^n . Мебиусова инвариантность абсолютного двойного отношения. Критерий мебиусовости гомеоморфизма \bar{R}^n в терминах абсолютного двойного отношения.

Критерии оценки:

Критерии	Оценка
- студент знает формулировки определений, вынесенных на зачет, и может привести пример к каждому определению; - студент знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет; - решены все индивидуальные задания;	"Зачтено"
- студент не знает формулировки определений, вынесенных на зачет, или не умеет приводить примеры для них; - студент не знает формулировки основных утверждений и теорем, вынесенных на зачет; - индивидуальные задания решены не в полном объеме;	"Не зачтено"